Mobius şeridi ve klein şişesi nasıl yapılır

Klein Şişesi Klein Şişesi 1882 yılında alman matematikçi Felix Klein tarafından bulunmuştur. klein şişesi,möbius şeridi gibi tek yüzeye sahip olmasına rağmen, möbius şeridi üç boyutlu öklid uzayında yapılabilen bir şekilken, klein şişesinin yapılabilmesi için dört boyutlu bir uzaya ihtiyaç vardır. İç ve dış yüzeye değilidr.iki tane mobius bandının birleşimidir.Tabi bu 4 boyutta mümkün..çok orjinal bişey yaa...bir karınca(işi gücü yok hayvanın tabi hehe) bu şeklin içini ve dışını yüzey değiştirmeden yürüyebilir.çünküü bu şekil tek yüzeyden oluşur... Ahanda video.. Möbius şeridine, internetteki çeşitli popüler matematik yazılarında sıkça rastlanır. Bir önceki yazıda, çok yerde okuyabilmemize karşın, gözümüzde canlandırmamızın zor olduğu bir dönüşümün videosu vardı . Tabii ki böyle bir dönüşüm için, “Nasıl oluyor da oluyor?” demek veya daha öncesi bunu merak etmek için, öncelikle onu tanımak gerekir. Bu yüzden amacımız, möbius şeridini ve belki başka bir yazıda da Klein şişesini tanıtmak. Öncelikle, Möbius şeridi ne imiş bir görelim. İşte size Wikipedia’dan alınan, estetik bir möbius şeridinin resmi. Yapmak ve görmek, anlamanın en iyi yoludur (Bugünkü eğitimin de en büyük eksikliği) . Malzemelerimiz şunlar: Kâğıt,bant ve makas. Kırtasiyeci amcadan aldığınız kağıdı, aşağıda görüldüğü üzere bir şerit olacak şekilde kesin. Şimdi şeridi alıp, A ile C, ve B ile D çakışacak şekilde bantlayıp birleştirin. Elinizde tabii ki gayet normal bir şerit var şu an. [AC] ve [BD] (doğru parçalarına) “kenar”, A,B,C ve D’nin sınırladığı kısma da “yüzey” diyelim. Şimdi şeridin içerde kalan yüzeyine parmağınızı koyun ve şerit boyunca dolaştırın. Aynı şeyi dıştaki yüzey için de yaptığınızda, kağıdın çok çok ince olan kenarını aşmadan bir yüzeyden diğerine geçmenin mümkün olmadığını görmemiz tabii ki ileri bir anlayışın göstergesi değil. Bu sıkıcı bir deneydi ama hazır parmağınız şeridin üzerindeyken, bir de aynı deneyi kağıdın kenarı üzerinde yapın. Burada da gözlemleyeceğiniz üzere parmağınızı kağıttan kaldırmadan, bir kenardan diğerine geçmenin tek yolu yüzeyi kullanmaktır. Şimdi Möbius şeridini enteresan kılan özelliğe gelelim. Möbius şeridini yapmak üzere, şekilde görüldüğü gibi, C ve D nin olduğu ucu kendi etrafında döndürüyoruz. Döndürdüğünüzde olması gereken durum aşağıda görüldüğü gibi. Şimdi A ile D, ve B ile C çakışacak şekilde, kâğıdın iki ucunu bantlayarak birleştirin ve ev yapımı ilk Möbius şeridinize bakın. İlk şeritte yaptığımız deneyleri Möbius şeridi üzerinde tekrarlayın. Kağıdın yüzeyine parmağınızı koyun ve az önce yaptığınız gibi dolaştırmaya başlayın. Az öncekinin aksine, tüm yüzeyi dolaşabildiğinizi farkedeceksiniz. Bu da şu anlama gelir: Möbius şeridinin herhangi bir yüzeyini boyamaya başlarsanız, şeridin tüm yüzeyini boyamanız gerekecek. Yani elinizde tuttuğunuz şeridin, az önce olduğu gibi iç ve dış olarak ayırabileceğiniz iki yüzeyi değil, tek bir yüzeyi vardır. Bunu daha da somutlaştırmanın yolu, (eğer estetik kaygınız varsa şöyle güzelinden) bir kalem alıp az önce parmağınızın izlediği yolu yüzey boyunca çizmektir. Göreceğiniz üzere, çizdiğiniz yol tüm şeridi dolaşıyor. Şimdiye kadar yaptıklarımızı özetlersek: Kâğıt bir şerit alıp herhangi bir kıvırma yapmadan uçları birleştirdik. İlk yaptığımız bu şeride K° diyelim. K° ın 2 yüzeyi ve 2 kenarı olduğunu gördük. Ardından şeridin ucunu bir kere kıvırdık ve Möbius şeridini elde ettik. Möbius şeridini de K^1 olarak adlandırırsak, K^1 in tek bir yüzeyi ve tek bir kenarı olduğunu anladık. Burada 0 ve 1, tabii ki şeridin birleştirilmeden önceki kıvrılma sayısını gösteriyor. Daha ileri gitmeden sorulabilecek çeşitli sorular var. Sorulardan biri şu olabilir: n’nin hangi değerleri için, Kn tek yüzeye (ve tek kenara), hangi değerleri için iki yüzeye (ve iki kenara) sahiptir ? (Vereceğiniz yanıtın doğruluğundan emin değilseniz veya bir yanıtınız yoksa en uygun yol, bilimum K2, K3, K4,… şeritlerini yapıp incelemek olacaktır) Bunun yanıtını verenler de şeritleri daha estetik hale getirip üzerlerine K°, K^1 yazarak “mühim şeyler yapıyorum” hissine kapılma yolunda önemli bir adım atabilir, şeritleri mat bir zemin üzerine koyup seyrederken, bir yandan da elektronik müzik dinleyebilirler. İsteğe bağlı olarak yapılabileceklerden bazıları, renkli kalemler kullanıp estetik bir ok biçimiyle yüzeyleri işaretlemek veya kenarları boyamak olabilir. Ve işler karışmaya başlar… Şimdi yapacağımız ise, şeritleri belli oranlarda kesmek ve bu yapılan işlem ile elde ettiğimiz parçayı veya parçaları incelemek. Öncelikle bir Möbius şeridini aşağıdaki şekilde olduğu gibi görmeye çalışalım, yani boylamasına bölgelerden yapılandırılmış gibi. Az önce yaptıklarımız göz önüne alındığında, her bir bölgenin içindeki bir okun, şeridin tüm yüzeyini tamamen dolaştığını anlamak güç olmayacaktır. Şekildeki Möbius şeridi, (birbirine paralel olarak) 4 bölgeye ayrılmış. Bu şeridi, K1 B4 olarak adlandırabiliriz. Açıktır ki, K0 ı ortadan bir çizgiyle boylamasına ayırırsak, yine iki adet K0 elde ederiz. Bu işlemi : K0 B2 → K0 + K0 olarak gösterebiliriz. Elde edilen her bir şerit kalınlık olarak tabii ki yarıya inmiştir ama uzunlukları aynıdır. Şimdi aynı kesme işlemini K1 e yapalım. Önerilen, mevcut şeritleri alıp kesmek değil, kesilmeden önceki hallerini karşılaştırmak üzere yeni şeritler yapıp onları kesmenizdir. K1 i alıp kestiğinizde, şaşırtıcı ve sezgi gücünüzü biraz yıkıma uğratan (uğramadı deyip kendinizi kandırmayın) bir sonuçla karşılaşmaya hazır olun. Bu kez ne yazık ki iki şerit değil, tek bir şerit elde ediyoruz. Aşağıdaki şekilde amacına uygun olarak yapılmış bir Möbius şeridi, yani K1 görülmekte. Yapılan işlem: K1 B2 → K2 Before Ve ortadan kesilince şu hale geliyor. After Şimdi şeridi biraz evirip çevirelim. Keserek elde ettiğimiz yeni şeridin incelenecek bir çok özelliği var. Örneğin bu şerit, artık bir K1 değildir. Arka kısma doğru baktığınızda, bu şeridin iki defa katlanmış olduğunu, yani artık bir K2 haline geldiğini görebilirsiniz. Artık bu şeridin tek bir yüzeyi değil, K0 da olduğu gibi iki yüzeyi vardır. Aynı sonuca, şeridin yüzeyindeki okları takip ederek de ulaşabiliriz. Oklar sadece tek bir yüzeyde bulunmaktadır ama kesme işlemini yapmadan önce, şeridin tamamını dolaşıyorlardı. Yapılabilecek başka bir gözlem, şeridin uzunluğunun iki katına çıkmış olmasıdır (çünkü tek parça olarak kaldı) . Uzunluğu, az önceki sembolizasyona adapte ederek U ile gösterelim ve yukarıdaki dönüşümü bir daha yazalım. K1 B2 → K2U2 İşlerin karışmaya başladığı nokta da tam burada, şeritlerin kesilme oranında ortaya çıkmaktadır. Yani, şeridi yanyana kaç bölgeye ayırdığımıza bağlı olarak şaşırtıcı sonuçlarla karşılaşıyoruz. Bu kesme işlemiyle elde edilen şeritler ya da halkalar , ingilizce bir kaç kaynakta “paradromik halka” olarak geçiyor (paradromic ring). TDK’nın 2000 basımı “Matematik Terimleri Sözlüğü” nde “paradromik” terimi yer almıyor, yani bu terimin henüz bir türkçe karşılığı var mı bunu bilmiyorum. Aslında, yapılan mevcut aramalarla, “paradromic ring” teriminin geçtiği yegâne kaynak Wolfram olarak görünmekte. Bloglarda okuyacağınız Möbius şeridi ile ilgili bir çok içeriğin metni de direkt olarak Wolfram’dan alınma. Wolfram’da paradromik halkalarla ilgili aşağıdaki tablo var. half-twists cuts divs. result 1 1 2 1 band, length 2 1 1 3 1 band, length 2 1 Möbius strip, length 1 1 2 4 2 bands, length 2 1 2 5 2 bands, length 2 1 Möbius strip, length 1 1 3 6 3 bands, length 2 1 3 7 3 bands, length 2 1 Möbius strip, length 1 2 1 2 2 bands, length 1 2 2 3 3 bands, length 1 2 3 4 4 bands, length 1 Meraklısı tabloyu inceleyebilir. Az önce bahsedilen ve sonucu fotoğrafta görülüyor olan işlem, tablonun ilk satırında yer alıyor. Bu yazıda, “şeridi bir kere kıvırma” olarak anlatılan işlem, tabloda “half-twist” olarak geçiyor. “Divs” sütunu, şeridin yanyana kaç bölgeye ayrıldığını gösteriyor. Aşağıda, hevesle boyanan ve kesilen diğer şeritleri inceleyebilirsiniz. K1 B3 → K1 U1 + K2 U2 K1 B3 K1 U1 + K2 U2 Yukarıdaki şeridin aynısı (K1 U1 sola doğru kaydırılmış) K1 B5 → K1 U1 + 2 K2 U2 K1 B5 değil, dönüşüm sonucu elde edilen K1U 1 + 2 K2 U2 gösterilmiştir. Paradromik halkalar ve Möbius şeridiyle ilgili yazılıp çizilecek oldukça fazla özellik mevcut. Burada, sadece önemli görülen ve keyifle yapılan bir kaç çalışma ve bunların gözlemleri yer almakta. İlgililenenler daha fazlasını yazı içinde geçen bağlantılardan inceleyebilirler. Yönlendirilebilir yüzey, bir torusun (kısaca simidin) çeşitli şeritlere bölünebilmesi veya tekrar yapıştırılarak bir torus elde edilebilmesi, Klein şişesiyle ilişkileri gibi bir çok konu, araştırmaya ve merak etmeye değer. Möbius şeridine, “sanatsal çalışma” olarak adlandırdığımız bir çok işte de rastlamak mümkün. Akla gelmesi gereken ilk kişi Escher olmalı. Bunun yanında İlhan Koman, “3-D Möbius türevleri ve piramitler” adı altındaki serisinde Möbius formunu kullanmıştır. Koman’ın Möbius uygulamalarından biri Stockholm Şehir Terminalinde yer alıyor. Ayrıca “paradromik halka” terimi aratılırken, bir de şuna rastlandı. Şeritlerle uğraşıp, biraz da unutalı yaklaşık bir ay kadar oldu. O yüzden bu yazı da biraz dağınık ve bölük pörçük oldu. Bugünlük Möbius şeridi yetsin, yeniden ilgimizi çektiği ve vakit bulabildiğimiz bir zamanda daha fazlasını yazarız… Tags: eğitim, geometri, matematik, möbius şeridi, okul, paradromik halka